微分積分 II の教科書 2.3[B]　2(1) (p.106) の解答について

2.3[B]　2 (1)　次の積分を求めよ：

$$\int \frac{1}{(x+2)\sqrt{x^2-5}}\,dx$$

解説.　$t = \sqrt{x^2-5} - x$ とおいて, 置換積分を行ふと

$$\begin{aligned}
(\text{与式}) &= \int \frac{2}{t^2-4t+5}\,dt \\
&= \int \frac{2}{(t-2)^2+1}\,dt \\
&= 2\tan^{-1}(t-2) + C \\
&= 2\tan^{-1}\left(\sqrt{x^2-5} - x - 2\right) + C
\end{aligned}$$

を得る．一方 $t = \sqrt{x^2-5} + x$ とおいて, 置換積分を行ふと

$$\begin{aligned}
(\text{与式}) &= \int \frac{2}{t^2+4t+5}\,dt \\
&= \int \frac{2}{(t+2)^2+1}\,dt \\
&= 2\tan^{-1}(t+2) + C' \\
&= 2\tan^{-1}\left(\sqrt{x^2-5} + x + 2\right) + C'
\end{aligned}$$

を得る．これら 2 種類の解答は見掛けは異るが, もちろんどちらも正解である．これを納得するには, tan の加法公式

$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

を使ふ．ここで $X = \tan\alpha$, $Y = \tan\beta$ とおけば

$$\tan^{-1}X - \tan^{-1}Y = \tan^{-1}\frac{X-Y}{1+XY}$$

を得るが, いま

$$X = \sqrt{x^2-5} + x + 2, \qquad Y = \sqrt{x^2-5} - x - 2$$

を代入すれば

$$\tan^{-1}(\sqrt{x^2-5} - x - 2) - \tan^{-1}(\sqrt{x^2-5} + x + 2) = \tan^{-1}\frac{2x+4}{4x+8} = \tan^{-1}\frac{1}{2}$$

を得る．つまり, 上の 2 種類の解は $C' = C + \tan^{-1}\frac{1}{2}$ とすれば完全に一致することがわかつた．

2018.10.19　Y.Ô.